روش اجزاء محدود احتمالاتی برای پوسته‌های دوار

سيد سعيد برادران حسيني
دانشجوي كارشناسي ارشد سازه - دانشكده مهندسي عمران - دانشگاه تهران
رضا عطارنژاد
عضو هیئت علمی دانشكده مهندسي عمران - دانشگاه تهران

چکیده

خصوصيات تصادفي عموماً به دو دسته وابسته به زمان و مستقل از زمان طبقه‌بندي مي‌شوند. عدم قطعيت در هندسه يا خواص ماده غالباً به دسته مسائل تصادفي مستقل از زمان مربوط مي‌شوند؛ در حالي‌كه عدم قطعيت در بارگذاري و شرايط محيطي در دسته مسائل تصادفي وابسته به زمان جاي مي‌گيرند.

در اين مقاله، روش اجزاي محدود براي مسائل سازه‌اي شامل المان پوسته دوار (پوسته متقارن محوری) با خواص مواد غيرقطعي و تحت شرايط بارگذاري استاتيكي (مسائل تصادفي استاتيكي) بسط داده شده است. فرضيات اساسي در اين بررسی عبارتند از متغير در نظر گرفته شدن مدول الاستيسيته و مدول برشی ماده، تعريف ميدان تغيير مكان (متغير مستقل از زمان) به‌وسيله يك ميدان تصادفي يك بعدي همگن و شرايط بارگذاري استاتيكي قطعي. در اين بررسی، ابتدا ماتريس سختي المان پوسته دوار با فرض توابع توزيع غير قطعی (تصادفی) روی المان برای مدول الاستيسيته و مدول برشی ماده، با روش انرژی بدست می‌آيد. سپس بردار بار کلی استخراج گرديده و معادله تعادل کلی سازه (روابط بين نيروها و تغيير مکان‌ها) برقرار می‌شود.

ماتريس سختی کلی سازه و بردار تغييرمکان‌های گرهی، بصورت توابعی از متغيرهای تصادفی تعريف می‌شوند. اين متغيرهای تصادفی، در واقع درجات مختلف ممان‌های تابع توزيع تصادفی روی عضو می‌باشند. در نهايت با بسط بردار تغييرمکان‌های گرهی توسط سری تيلور با تقريب مرتبه اول حول مقادير ميانگين اين متغيرهای تصادفي و استفاده از تئوری احتمالات، مقدار ميانگين (اميد رياضی بردار تغيير مكان‌های گرهی) و توابع تغييرات تغيير مکان‌های گرهی سازه (عناصر قطر اصلی ماتريس کواريانس تغيير مکان‌های گرهی) استخراج می‌شود.

واژه‌هاي كليدي: اجزاء محدود، ماتريس سختي، المان پوسته دوار، مدول الاستيسيته، تصادفي، سری تيلور، تابع تغيير.

مقدمه

اگر يك آزمايش يكسان چندين بار اجرا شود و نتايج بدست آمده هميشه مشابه باشند (با قاعده يا بدون قاعده)، فرآيند قطعي ناميده مي‌شود. اگر زماني‌كه همه شرايط تحت كنترل آزمايش‌گر يكسان باقي بماند، نتايج با يكديگر متفاوت باشد، فرآيند غيرقطعي يا تصادفي ناميده مي‌شود. سيستم‌هاي سازه‌اي داراي عدم قطعيت، سيستم‌هاي تصادفي ناميده مي‌شوند كه اين عدم قطعيت مي‌تواند مربوط به هندسه، خواص مواد يا شرايط بارگذاري باشد. خصوصيات تصادفي عموماً به دو دسته وابسته به زمان و مستقل از زمان طبقه‌بندي مي‌شوند. عدم قطعيت در هندسه يا خواص ماده غالباً به دسته مسائل تصادفي مستقل از زمان مربوط مي‌شوند؛ در حالي‌كه عدم قطعيت در بارگذاري و شرايط محيطي در دسته مسائل تصادفي وابسته به زمان جاي مي‌گيرند.

در اين مقاله، روش اجزاي محدود تصادفي براي مسائل سازه‌اي با خواص مواد غيرقطعي و تحت شرايط بارگذاري استاتيكي (مسائل تصادفي استاتيكي) بسط داده شده است.

فرضيات اساسي عبارتند از متغير در نظر گرفته شدن مدول الاستيسيته، ثابت فرض شدن ضريب پواسون، تعريف ميدان تغيير مكان (متغير مستقل از زمان) به‌وسيله يك ميدان تصادفي يك بعدي همگن و شرايط بارگذاري استاتيكي قطعي.

در اين مقاله، ابتدا ماتريس سختي المان پوسته دوار با خواص مواد تصادفي بدست آمده و سپس، روابط بين نيروها و تغيير مكان‌ها بيان می‌گردد. در نهايت با بسط به سری تيلور و تئوری احتمالات، مقدار ميانگين و تابع

تغییرات تغییر مکان‌های گرهی سازه با مدول الاستیـسیته تصادفي استخراج می‌شود.

استخراج ماتریس سختي براي عضو پوسـته متقارن محوری

عضو پوسته متقارن محوري نشان داده شده در شـکل (۱) در دستگاه مختصات کروي به شرح زير تعريف ميگردد:

ϕ: مختص زاويه‌اي در امتداد نصف‌النهار.

θ: مختص زاويه‌اي در امتداد مماس بر دايره افقي.

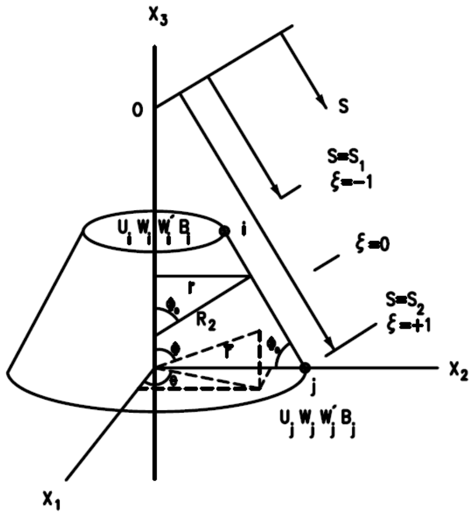
$\bar{r}$: فاصله اندازه‌گيري شده بسمت بيرون.

w', v', u' نـشانگر مؤلفـه‌هـاي جابجـايي در جهـات $\bar{r},\theta,\phi$ در نقطه دلخواه در بدنـه سـازه پوسـته بـوده و سطح مياني پوسته بعنوان سـطح مرجـع مـي‌باشـد. همـه پارامترهاي هندسي در تقاطع با اين سطح تعريف شده‌اند. پارامترهاي بدون پريم مربوط به سطح مياني المان پوسته مي‌باشند. بنابراين w,v,u مؤلفه‌هاي جابجايي در امتـداد جهات $\bar{r},\theta,\phi$ درسطح مياني هستند . بطور مشابه R_1 و R_2 شعاع‌هاي انحنا در جهات θ,ϕ مي‌باشند. ζ نشان دهنده فاصله اندازه‌گيري شده از سطح مياني تا يک نقطـه دلخواه در جهت شعاعي مي‌باشد و β_1 و β_2 دوران بـردار قائم بر سطح ميـاني حـول جهـات ϕ,θ اسـت. براسـاس تئوري تغيير شکل برشي مرتبـه اول بـراي المـان پوسـته، مؤلفه‌هاي تغيير مکـان w', v', u' بـر اسـاس w,v,u بصورت زير تعريف مي‌شوند:

$$u' = u + \zeta\beta_1$$
$$v' = v + \zeta\beta_2 \qquad (۱)$$
$$w' = w$$

اين شکل نشان دهنده يک عضو براي اسـتفاده در تحليـل سازه پوسته دوار مي‌باشد و داراي مقدار ثابـت Φ_0 اسـت. اگر Φ_0=۹۰ باشد، هندسه نشانگر پوسته استوانه‌اي است. اگر $\Phi_0 = 0^o$ باشد، مسأله صفحه دايره‌اي بـا ايـن عـضو قابل تحليل است. فرآيند حل براي تحليل پاسـخ متقـارن محوري بسط داده شده است و بنابراين هيچ پـارامتري بـه مولفه θ وابسته نيست. علاوه براين مؤلفه، تغيير مکـان v و دوران β_2 حذف شده‌اند.

عضو مورد بحث داراي دوگره است که هر يک چهار درجه آزادي w,u، $\frac{dw}{ds}$ و β_1 دارند. کرنش در اين حالت به



شکل۱: المان پوسته دوار

صورت زير بيان مي‌شود:

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} \qquad \text{(۲- الف)}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}\cos\Phi_0 + \frac{w}{R_2} \qquad \text{(۲- ب)}$$

$$\gamma_{r\phi} = \beta_1 + \frac{\partial w}{\partial s} \qquad \text{(۲- ج)}$$

$$k_\phi = \frac{\partial \beta_1}{\partial s} \qquad \text{(۲- د)}$$

$$k_\theta = \frac{\beta_1}{r}\cos\Phi_0 \qquad \text{(۲- ه)}$$

بردار مؤلفه کرنش سطح مياني بصورت زير تعريف مي‌شود:

$$\{\chi(s)\}^T = \{\varepsilon_\phi \varepsilon_\theta \gamma_{r\phi} k_\phi k_\theta\} \qquad (۳)$$

در هر عضو يک دستگاه مختـصات بـدون بعـد (ξ) بکـار مي‌رود. در گـره i، $\xi = -1$، در گـره j، $\xi = +1$ و در وسط عضو $\xi = 0$ است.

فرض مي‌شود s فاصله اندازه‌گيري شده از رأس مخروط تا يک نقطه دلخواه در عضو، s_1 فاصله از رأس تا گـره i و s_2 همان فاصله تا گره j باشد. ارتباط بين ξ, s بصورت زيـر است:

$$s = \frac{s_1 + s_2}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2}\xi \qquad (۴)$$

تغيير مکان يک نقطه دلخواه در پوسته روي سطح ميـاني در قالب تغيير مکان‌هاي گرهي بصورت زير بيان مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
u &= N_1(\xi)U_i + N_2(\xi)U_j \\
\beta_1 &= N_1(\xi)B_i + N_2(\xi)B_j \\
w &= N_3(\xi)W_i + N_4(\xi)W_j \\
&\quad + N_5(\xi)\frac{dW_i}{ds} + N_6(\xi)\frac{dW_j}{ds}
\end{aligned} \qquad (۵)
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi) &= (1-\xi)/2 \\
N_2(\xi) &= (1+\xi)/2 \\
N_3(\xi) &= 1/2 - 3\xi/4 + \xi^3/4 \\
N_4(\xi) &= 1/2 + 3\xi/4 - \xi^3/4 \\
N_5(\xi) &= s_0\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right)/8 \\
N_6(\xi) &= s_0\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)/8
\end{aligned} \qquad (۶)
$$

عبارات رابطه (۶) توابع شکل نامیده می‌شوند و $s_0 = s_2 - s_1$ مي‌باشد. براي بسط ماتريس سختي عضو، بردار {Q} براي تغيير مكان نقطه گرهي تعريف مي‌شود:

$$
\{Q\}^T = \left\{U_i W_i \frac{dW_i}{ds} B_{1i} U_j W_j \frac{dW_j}{ds} B_{1j}\right\} \qquad (۷)
$$

با جايگزيني رابطه (۵) در رابطه (۲) و مرتب‌سازي عبارات، بردار كرنش بدست مي‌آيد:

$$
\{\chi\} = [B]_{5x8}\{Q\} \qquad (۸)
$$

که در آن $\{\chi\}$ بردار كرنش تعريف شده در رابطه (۳) بوده و ماتریس [B] در ضمیمه (۱) معرفی شده است.

با استفاده از $\{\chi\}$ در رابطه كرنش- انرژي داريم:

$$
\begin{aligned}
U &= (1/2)\{Q\}^T \\
&\left(\int_{s_1}^{s_2} [B]^T \int [D] r\, d\theta\, [B] ds\right)\{Q\} \\
&= (1/2)\{Q\}^T [K]\{Q\}
\end{aligned} \qquad (۹)
$$

که در آن:

$$
[K] = \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} [B]^T [D][B] d\xi \qquad (۱۰)
$$

ماتریس [K] ماتریس سختي عضو مي‌باشد. با توجه به شکل (۱)، در هر عضو $r = s * Cos\phi_0$ مي‌باشد. در صورتی که ابعاد المان کوچک باشد، r را می‌توان با تقریب خوبی از رابطه $r = s_m * Cos\phi_0$ بدست آورد ($s_m = \frac{s_1 + s_2}{2}$). این بدان معناست که r با تغییرات ξ تغییر نمی‌کند. ماتریس [D] شامل عبارات متشکل از خواص مواد و هندسه پوسته مي‌باشد و بصورت زير بيان مي‌گردد:

$$
[D] = \begin{bmatrix}
a_0E_{11} & c_0E_{12} & 0 & a_1E_{11} & c_1E_{12} \\
c_0E_{12} & b_0E_{22} & 0 & c_1E_{12} & b_1E_{22} \\
0 & 0 & a_0E_{44} & 0 & 0 \\
a_1E_{11} & c_1E_{12} & 0 & a_2E_{11} & c_2E_{12} \\
c_1E_{12} & b_1E_{22} & 0 & c_2E_{12} & b_2E_{22}
\end{bmatrix} \qquad (۱۱)
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
a_m &= \int_{-h/2}^{+h/2} \zeta^m \left(1+\frac{\zeta}{R_1}\right)^{-1}\left(1+\frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta \\
b_m &= \int_{-h/2}^{+h/2} \zeta^m \left(1+\frac{\zeta}{R_1}\right)\left(1+\frac{\zeta}{R_2}\right)^{-1} d\zeta \\
c_m &= \int_{-h/2}^{+h/2} \zeta^m \left(1+\frac{\zeta}{R_1}\right)^{-1}\left(1+\frac{\zeta}{R_2}\right)^{-1} d\zeta
\end{aligned} \qquad (۱۲)
$$

و m=۰،۱،۲،... انتگرال‌گيري بايد بر روي ضخامت پوسته (h) انجام شود. لازم به ذکر است که براي پوسته‌هاي مخروطي و استوانه‌اي $R_1 = \infty$ است. براي مواد اورتوتروپيک (داراي محور اصلي) عبارات رابطه (۱۱) به صورت زير درمی‌آيند:

$$
\begin{aligned}
E_{11} &= E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
E_{22} &= E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
E_{12} &= \nu_{12}.E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{21}.E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\
E_{21} &= E_{12} \\
E_{44} &= (5/6).G_{23}
\end{aligned} \qquad (۱۳)
$$

در عبارات فوق G,E مدول الاستيسيته و برشي و ν ضريب پواسون مي‌باشد.

خواص مواد بصورت زير فرض مي‌شود:

$$
\begin{aligned}
E &= E_0\left[1 + f(\xi)\right] \\
G &= G_0\left[1 + f(\xi)\right]
\end{aligned} \qquad (۱۴)
$$

که در آن E_0 , G_0 مقادير ميانگين G,E هستند و ميدان تصادفي خواص مواد توسط $f(\xi)$ تعريف مي‌شود.

بنابراين ماتريس [D] به شكل زير قابل بازنويسي است:

$$
[D] = [D_0][1 + f(\xi)] \qquad (۱۵)
$$

که در آن $[D_0]$ مقدار ميانگين [D] است. رابطه (۱۰) بصورت زير تبديل مي‌شود:

$$\begin{aligned}[K]^{(e)} &= \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} [B]^T \{[D_0] + f(\xi)[D_0]\}[B] d\xi \\ &= \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} [B]^T [D_0][B] d\xi \\ &+ \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} [B]^T [D_0][B] f(\xi) d\xi \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

رابطه (۱۶) نشان می‌دهد که ماتریس سختي ترکیب دو بخش است. بخش اول بخش قطعي و بخش دیگر تصادفي با تابع تصادفي $f(\xi)$ است.

پس از انجام ضرب ماتریسي و انتگرال‌گیري از اولین عبارت رابطه (۱۶)، بخش قطعي ماتریس سختي عضو بصورت رابطه (۱۷) قابل بیان است:

$$[K]_0^{(e)} = \pi s_0 r [K_0]_{8x8} \qquad (۱۷)$$

که در آن $[k_0]$ یک ماتریس ۸×۸ است. براي ساده‌سازي انتگرال فرض می‌شود R_2, r در هر عضو ثابت هستند؛ زیرا وقتي اندازه عضو به قدر کافي کوچک باشد، می‌توان مقادیر را در نقاط میاني عضو براي محاسبه بکار برد.

عبارت دوم رابطه (۱۷)، بخش تصادفي ماتریس سختي عضو را تشکیل می‌دهد. پس از انجام ضرب ماتریسي و جمع‌آوري عبارات، این قسمت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}[K]_s^{(e)} &= X_0^{(e)}.\Delta[K]_0^{(e)} + X_1^{(e)}.\Delta[K]_1^{(e)} \\ &+ X_2^{(e)}.\Delta[K]_2^{(e)} + X_3^{(e)}.\Delta[K]_3^{(e)} \\ &+ X_4^{(e)}.\Delta[K]_4^{(e)} + X_5^{(e)}.\Delta[K]_5^{(e)} \\ &+ X_6^{(e)}.\Delta[K]_6^{(e)} \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که در آن $X_6^{(e)},....,X_1^{(e)},X_0^{(e)}$ متغیرهاي تصادفي براي عضو بوده و به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$X_i^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \xi^i f^{(e)}(\xi) d\xi \qquad (۱۹)$$

همه $[\Delta k]$ ها ماتریس‌هاي ۸×۸ هستند.

استخراج بردار بار براي عضو پوسته متقارن محوري

پوسته مورد نظر در این مساله داراي تقارن محوري است و شرایط بارگذاري نیز متقارن محوري درنظر گرفته می‌شود. کار انجام شده توسط بار گسترده یکنواخت برابر است با:

$$W = (\frac{s_2 - s_1}{2}) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} (p_\xi + p_r w) r d\xi d\theta \qquad (۲۰)$$

با در نظر گرفتن $s_0 = s_2 - s_1$ و شرایط تقارن، رابطه (۲۰) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$W = \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} (p_\xi + p_r w) d\xi \qquad (۲۱)$$

از رابطه (۵)، w,u در رابطه (۲۱) جایگزین می‌گردد:

$$\begin{aligned} W = \pi s_0 r \int_{-1}^{+1} & (p_\xi N_1(\xi) U_i \\ &+ p_\xi N_2(\xi) U_i + p_r N_3(\xi) W_i \\ &+ p_r N_4(\xi) W_j + p_r N_5(\xi) \frac{dW_i}{ds} \\ &+ p_r N_6(\xi) \frac{dW_j}{ds}) d\xi \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

رابطه (۲۲) در قالب نیروها و تغییر مکان‌هاي گرهي نیز قابل بیان است:

$$\begin{aligned} W &= \{Q\}^T \{F\} \\ \{Q\}^T &= \{U_i W_i \frac{dW_i}{ds} B_{1i} U_j W_j \frac{dW_j}{ds} B_{1j}\} \\ \{F\} &= \{p_1 \; p_2 \; p_3 \; p_4 \; p_5 \; p_6 \; p_7 \; p_8\} \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که در آن {Q} بردار تغییر مکان گرهي و {F} بردار بار ثابت می‌باشد. لذا رابطه (۲۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} W &= p_1 U_i + p_2 W_i + p_3 \frac{dW_i}{ds} \\ &+ p_4 B_{1i} + p_5 U_j + p_6 W_j \\ &+ p_7 \frac{dW_j}{ds} + p_8 B_{1j} \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با مقایسه روابط (۲۲) و (۲۴) مؤلفه‌هاي بردار بار {F} عبارتند از:

$$p_1 = \pi s_0 r p_\xi \int_{-1}^{+1} N_1(\xi) d\xi \qquad \text{(۲۵- الف)}$$

$$p_2 = \pi s_0 r p_r \int_{-1}^{+1} N_3(\xi) d\xi \qquad \text{(۲۵- ب)}$$

$$p_3 = \pi s_0 r p_r \int_{-1}^{+1} N_5(\xi) d\xi \qquad \text{(۲۵- ج)}$$

$$p_4 = 0 \qquad \text{(۲۵- د)}$$

$$p_5 = \pi s_0 r p_\xi \int_{-1}^{+1} N_2(\xi) d\xi \qquad \text{(۲۵- ه)}$$

$$p_6 = \pi s_0 r p_r \int_{-1}^{+1} N_4(\xi) d\xi \qquad (\text{۲۵-و})$$

$$p_7 = \pi s_0 r p_r \int_{-1}^{+1} N_6(\xi) d\xi \qquad (\text{۲۵-ز})$$

$$p_8 = 0 \qquad (\text{۲۵-ح})$$

در رابطه فـوق، $N_i(\xi)$ $(i=1,2,...,6)$ توابـع شـكل تعريف شده در رابطه (۶) هستند. پس از انتگرال‌گيـري از توابع شكل در رابطه (۲۵)، مؤلفه‌هاي بردار بار بصورت زير بدست مي‌آيند:

$$p_1 = \pi s_0 r p_\xi \qquad p_2 = \pi s_0 r p_r$$
$$p_3 = \frac{1}{6}\pi s_0^2 r p_r \qquad p_4 = 0$$
$$p_5 = \pi s_0 r p_\xi \qquad p_6 = \pi s_0 r p_r \qquad (۲۶)$$
$$p_7 = -\frac{1}{6}\pi s_0^2 r p_r \qquad p_8 = 0$$

مؤلفه‌هاي بردار بار ثابت در رابطـه (۲۶)، مربـوط بـه يـك عضو بوده و بردار بـار كلـي، داراي مؤلفـه‌هـايي بـه تعـداد درجات آزادي مدل سازه مي‌باشد.

ماتريس سختي كلي و معادله تعادل

ماتريس سختي كلي بصورت زير بيان مي‌شود:

$$[K] = \sum_{e=1}^{N} [K_g]^{(e)} \qquad (۲۷)$$

كه در آن N تعداد كل اعضا و $[K_g]^{(e)}$ مـاتريس سـختي تبديل يافته در دستگاه مختصات كلي مـي‌باشـد. لازم بـه ذكـر اسـت كـه مـاتريس‌هـاي سـختي اعـضا و در نتيجـه ماتريس سختي كل، تـابعي از متغيرهـاي تـصادفي $X_i^{(e)}$ (i=0,1,2) هستند.

معادله تعادل بصورت زير نوشته مي‌شود:

$$[K]\{U\} = \{P\} \qquad (۲۸)$$

كه در آن [K] توسط رابطه (۲۷) بيـان مـي‌شـود و {U} بردار تغيير مكان گرهي كلي و {P} بردار نيـروي قطعـي كلي سازه مي‌باشد.

تحليل تغييرات تغييرمكان‌هاي گرهي

متغيرهاي تـصادفي مـاتريس سـختي بـصورت زيـر بيـان مي‌شوند:

$$X_i^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \xi^i f^{(e)}(\xi) d\xi \qquad (۲۹)$$

كه در آن، e=1,2,...,N و N تعداد كل اعضا مي‌باشد.

از آنجا كه $f^{(e)}(\xi)$ تابع تصادفي با مقدار ميـانگين صـفر مي‌باشـد، بنـابراين متغيرهـاي تـصادفي $X_i^{(e)}$ نيـز داراي ميانگين صفر هستند:

$$\overline{X}_i^{(e)} = 0 \ ; \ (e=1,2,...,N;\ i=0,1,2,..,6) \qquad (۳۰)$$

ماتريس سختي [K] و بردار تغيير مكان‌هاي گرهي {U} هر دو توابعي از متغيرهاي تصادفي $X_i^{(e)}$ بوده و لذا بصورت زير بيان مي‌شوند:

$$[K] = [K]\left(X_i^{(e)}; e=1,2,...,N;\ i=0,1,2,..,6\right)$$
$$\{U\} = \{U\}\left(X_i^{(e)}; e=1,2,...,N;\ i=0,1,2,..,6\right) \qquad (۳۱)$$

اگر $[K]_0$ و $\{U\}_0$ براي نمايش مقادير ماتريس سختي و بردار تغيير مكان گرهي در $\overline{X}_i^{(e)}$ بكار رونـد، رابطـه زيـر بين اين مقادير وجود دارد:

$$\{U\}_0 = [K]_0^{-1}\{P\} \ \text{يا}\ [K]_0\{U\}_0 = \{P\} \qquad (۳۲)$$

اگر بردار تغيير مكان گرهي {U} توسط سـری تيلـور بـا تقريـب مرتبـه اول حـول مقـادير ميـانگين متغيرهـای تصادفي $X_i^{(e)}$ بسط داده شود، خواهيم داشت:

$$\{U\} \cong \{U\}_0 + \sum_{e=1}^{N}\sum_{i=0}^{M}\left(X_i^{(e)} - \overline{X}_i^{(e)}\right)\left[\frac{\partial\{U\}}{\partial X_i^{(e)}}\right]_E \qquad (۳۳)$$

كه در آن N تعداد اعضا و M=۶ است.

علامت $[\ ]_E$ بيانگر اين است كه مشتق در مقادير ميانگين متغيرهـــاي تـــصادفي $X_i^{(e)}$ محاســـبه مـــی‌شـــود. مؤلفه $\left[\frac{\partial\{U\}}{\partial X_i^{(e)}}\right]_E$ در رابطه (۳۳) توسـط ديفرانـسيل‌گيـري جزئي از رابطه (۲۸) نسبت به $X_i^{(e)}$ و با استفاده از رابطـه (۳۲)، به شكل زير بازنويسی می‌شود:

$$\left[\frac{\partial\{U\}}{\partial X_i^{(e)}}\right]_E = -[K]_0^{-1}\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_i^{(e)}}\right]_E \{U\}_0 \qquad (۳۴)$$

با قرار دادن رابطه (۳۴) در رابطه (۳۳) و با توجه به رابطه (۳۰)، رابطه (۳۳) به شكل زير بازنويسی می‌شود:

$$\{U\} \cong \{U\}_0 - \sum_{e=1}^{N}\sum_{i=0}^{M}[K]_0^{-1}\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_i^{(e)}}\right]\{U\}_0 X_i^{(e)} \qquad (۳۵)$$

اميد رياضی (E) يا مقدار منتظره $\{U\}$ برابر است با:

$$E\{U\} = \{U\}_0 \qquad (۳۶)$$

رابطه (۳۶) نشان‌دهنده مقدار میانگین تغییر مکان‌های گرهي با تقریب مرتبه اول مي‌باشد.
ماتریس کواریانس {U} برابر است با:

$$\begin{aligned} Cov[\{U\},\{U\}] &= E\left[(\{U\}-\{U\}_0)\,(\{U\}-\{U\}_0)^T\right] \\ &= \sum_{e_1=1}^{N}\sum_{e_2=1}^{N}\sum_{i_1=0}^{M}\sum_{i_2=0}^{M}[K]_0^{-1}\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}}\right]_E\{U\}_0 \\ &\quad \{U\}_0^T\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_2}^{(e_2)}}\right]_E^T([K]_0^{-1})^T.E\{X_{i_1}^{(e_1)}X_{i_2}^{(e_2)}\} \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

که در آن N و M قبلاً تعریف شده‌اند.
طبق تعریف امید ریاضی، عبارت $E\{X_{i_1}^{(e_1)}X_{i_2}^{(e_2)}\}$ بصورت زیر بیان مي‌شود:

$$E\{X_{i_1}^{(e_1)}X_{i_2}^{(e_2)}\}= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}E\left[f^{(e_1)}(\xi_1)f^{(e_2)}(\xi_2)\right]d\xi_1 d\xi_2 \qquad (۳۸)$$

براي هر دو عضو دلخواه از سازه مثل المان‌هاي q و p روابط زیر برقرار است:

$$s_p = s_{p1}+\frac{1}{2}(1+\xi_1)s_{0p} \qquad (۳۹\text{- الف})$$

$$s_q = s_{q1}+\frac{1}{2}(1+\xi_2)s_{0q} \qquad (۳۹\text{- ب})$$

که s_q و s_p فاصله رأس مخروط تا هر نقطه از اعضاي q و p؛ s_{p_1}, s_{q_1} مختصات گرهي اولیه براي اعضاي q و p و s_{o_p}, s_{o_q} طول اعضای q و p هستند. رابطه بین s, ξ در شکل (۱) مشخص شده است.
فرض می‌کنیم همه اعضا با یک میدان تصادفي مشخص مي‌گردند و لذا:

$$E\left[f^{(e_1)}(s_p)f^{(e_2)}(s_q)\right]= R_{ff}(s_p-s_q)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{ff}(k)e^{ik(s_p-s_q)}dk \qquad (۴۰)$$

که در آن R_{ff} تابع همبستگي میدان تصادفي، S_{ff} تابع چگالي طیفي تواني مربوط به میدان تصادفي و k عدد موج مي‌باشد. طبق رابطه (۳۹)، مي‌توان نوشت:

$$s_p - s_q = s_{p1}-s_{q1}+\frac{1}{2}(s_{0p}-s_{0q}) + \frac{1}{2}s_{0p}\xi_1-\frac{1}{2}s_{0q}\xi_2 \qquad (۴۱)$$

با فرض مساوی بودن طول اعضا، رابطه (۴۱) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$s_p - s_q = s_{pq}+\frac{1}{2}s_0\xi_1-\frac{1}{2}s_0\xi_2 \qquad (۴۲)$$

که در آن $s_{pq}=s_{p_1}-s_{q_1}$ بوده و نشانگر فاصله بین اولین گره‌هاي هر دو عضو مي‌باشد.
بنابراین رابطه (۳۸) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} E\{X_{i_1}^{(e_1)}X_{i_2}^{(e_2)}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}S_{ff}(k).(e^{is_{pq}k}) \\ &.\int_{-1}^{+1}\xi_1^{i_1}e_1^{i(0.5s_0)k\xi_1}d\xi_1 \\ &.\int_{-1}^{+1}\xi_2^{i_2}e_2^{-i(0.5s_0)k\xi_2}d\xi_2 dk \end{aligned} \qquad (۴۳)$$

با جایگزيني رابطه (۴۳) در (۳۷)، داریم:

$$\begin{aligned} &Cov[\{U\},\{U\}]= \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}S_{ff}(k).\sum_{e_1=1}^{N}\sum_{e_2=1}^{N}\sum_{i_1=0}^{M}\sum_{i_2=0}^{M}[K]_0^{-1} \\ &\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}}\right]_E\{U\}_0\{U\}_0^T \\ &\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_2}^{(e_2)}}\right]_E^T([K]_0^{-1})^T.(e^{is_{pq}k}) \\ &.\int_{-1}^{+1}\xi_1^{i_1}e_1^{i(0.5s_0)k\xi_1}d\xi_1 \\ &.\int_{-1}^{+1}\xi_2^{i_2}e_2^{-i(0.5s_0)k\xi_2}d\xi_2 dk \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

بردار تغییرات تغییر مکان‌هاي گرهي شامل اعضاي قطري ماتریس کواریانس تغییر مکان‌هاي گرهي مي‌شود. بنابراین بردار تغییرات تغییر مکان‌ها برابر است با:

$$\begin{aligned} &Var\{U\}= \\ &\int_{-\infty}^{+\infty}S_{ff}(k).\sum_{e_1=1}^{N}\sum_{e_2=1}^{N}\sum_{i_1=0}^{M}\sum_{i_2=0}^{M}diag \\ &[K]_0^{-1}\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}}\right]_E\{U\}_0.\{U\}_0^T \\ &\left[\frac{\partial[K]}{\partial X_{i_2}^{(e_2)}}\right]_E^T([K]_0^{-1})^T.(e^{is_{pq}k}).\int_{-1}^{+1}\xi_1^{i_1}e_1^{i(0.5s_0)k\xi_1}d\xi_1 \\ &.\int_{-1}^{+1}\xi_2^{i_2}e_2^{-i(0.5s_0)k\xi_2}d\xi_2 dk \end{aligned} \qquad (۴۵)$$

بردار تغییرات بصورت خلاصه‌تر به شکل زیر قابل بازنویسي است:

$$Var\{U\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(k)\{V(K)\}dk \qquad (۴۶)$$

که در آن:

$$\{V(k)\} = \sum_{e_1=1}^{N} \sum_{e_2=1}^{N} \sum_{i_1=0}^{M} \sum_{i_2=0}^{M} diag \left([K]_0^{-1} \left[\frac{\partial [K]}{\partial X_{i_1}^{(e_1)}} \right]_E \{U\}_0 \right) . \{U\}_0^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial X_{i_2}^{(e_2)}} \right]_E^T ([K]_0^{-1})^T . \left(e^{is_{pq}k} \right) . \int_{-1}^{+1} \xi_1^{i_1} e_1^{i(0.5 s_0)k\xi_1} d\xi_1 . \int_{-1}^{+1} \xi_2^{i_2} e_2^{-i(0.5 s_0)k\xi_2} d\xi_2 dk \qquad (۴۷)$$

بردار $V(k)$ داراي مؤلفه‌هايي برابر با تعداد کل درجات آزادي سيستم سازه‌اي مي‌باشد. هر مؤلفه $V(k)$، «تابع تغییرات پاسخ» در درجه آزادي مربوطه، می‌باشد.

نتيجه‌گيري

در اين مقاله، ابتدا ماتريس سختي عضو پوسته متقارن محوری با خواص مواد تصادفي بدست آمده و سپس، روابط بين نيروها و تغيير مکان‌ها بيان گرديد. در نهايت با کمک بسط به سری تيلور و تئوری احتمالات، مقدار ميانگين و تابع تغييرات تغيير مکان‌های گرهی سازه با مدول الاستيسيته تصادفي استخراج گرديد.

اين روش می‌تواند برای تعيين نيروهای داخلی و تنش‌های اعضا و عکس‌العمل‌های تکيه‌گاهی مورد استفاده قرار گيرد. همچنين قابل بسط به ساير انواع المان‌ها (از جمله ورق نيز می‌باشد.

مراجع

1- Vanmarcke, E. and Grigoriu, M., (1983), "Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 109(5), 1203 - 1214.

2- Yamazaki, F. and Shinozuka, M., (1988), "Neuman Expansion for Stochastic Finite Element Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 114(8), 1335 - 1354.

3- Zhang, Q. L. and Peil, U., (1997), "Random Finite Element Analysis for Stochastic Responses of Structures", *Computers & Structures*, vol. 62, No. 4, 611 – 616.

4- Miller, Irwin and Freund, John E., (1985), "Probability and Statistics for Engineers",Prentice-Hall,Inc.

5- Jorge E. Hurtado and Diego A. Alvarez; (2003), "Classification Approach for Reliability Analysis with Stochastic Finite-Element Modeling", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 129, No. 8, pp. 1141-1149.

6- Anders M. J. Olsson and Göran E. Sandberg; (2002), "Latin Hypercube Sampling for Stochastic Finite Element Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 128, No. 1, pp. 121-125.

7- Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S., (1959), "*Theory of Plates and Shells*", McGraw-Hill, Inc.

۸-دکتر رضا عطارنژاد و سيد سعيد برادران حسينی، تحليل احتمالاتي سيستم‌هاي ارتجاعي به روش اجزاء محدود (SFEM)، پايان‌نامه کارشناسي ارشد، دانشگاه تهران، پرديس دانشکده‌های فنی، دانشکده مهندسی عمران، تابستان ۱۳۸۶.

ضميمه (۱):

$$[B]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s_0} & \frac{1-\xi}{2r}\cos\Phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2-3\xi+\xi^3}{4R_2} & \frac{-3+3\xi^2}{2s_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_0(1-\xi-\xi^2+\xi^3)}{8R_2} & \frac{-1-2\xi+3\xi^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi}{2} & -\frac{1}{s_0} & \frac{1-\xi}{2r}\cos\Phi_0 \\ \frac{1}{s_0} & \frac{1+\xi}{2r}\cos\Phi_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2+3\xi-\xi^3}{4R_2} & \frac{3-3\xi^2}{2s_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_0(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)}{8R_2} & \frac{-1+2\xi+3\xi^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\xi}{2} & \frac{1}{s_0} & \frac{1+\xi}{2r}\cos\Phi_0 \end{bmatrix}$$